

環論用語の「flat（平坦）」の由来

環論や代数幾何学における「flat（平坦）」という用語の由来について、歴史的な事実と数学的な経緯を解説します。

1. 誰がどこで「flat」を使い始めたか？

- 提唱者:** ジャン=ピエール・セール (Jean-Pierre Serre)
- 初出文献:** セールの1956年の著名な論文 "**Géométrie algébrique et géométrie analytique**" (通称 **GAGA**)
- 言葉の始まり:** この論文の中で、セールはフランス語の "**module plat**" (平坦加群) という言葉を初めて導入しました。これがのちに英語で "flat module"、日本語で「平坦加群」と翻訳されました。

【補足：名付けの理由に関する逸話】

なぜ「平坦 (plat / flat)」という単語が選ばれたのか、明確な幾何学的理由は**創始者であるセール本人も失念しています**。後年、代数幾何学者のブライアン・コンラッド (Brian Conrad) らがセール本人に「なぜ flat という言葉を選んだのか」と直接尋ねたところ、セールは「**なぜその言葉を使ったのか覚えていない。自分が思いついたのか、あるいは同年に出版されたカルタンとアイレンバーグの著書『Homological Algebra』周辺の議論に由来するのも定かではない**」と答えたという逸話が残っています。

2. どのような経緯で「flatness」の概念が発見されたか？

平坦性の概念は、最初から「空間が平らである」というような幾何学的な直感から生まれたわけではなく、**純粋に代数（ホモロジー代数）的な要請から発見されました**。

① 代数的な動機（完全性を保つ関手）

1950年代、セールやアレクサンドル・グロタンディークらは、代数幾何学を**層（そう、sheaf）**やホモロジー代数学の言葉で再構築しようとしていました。

環 R 上の加群 M に対して、テンソル積を取る関手（ファンクター） $- \otimes_R M$ は、一般には「右完全（短完全列の右側の構造を保つ）」ですが、左側の単射性（埋め込み）を保つとは限りません。

この関手が**左側の単射性も保つ（=完全関手になる）**ような、**ホモロジー代数的に極めて都合の良い（行儀の健全な）加群のクラス**として定義されたのが「平坦加群」です。これは自由加群や射影加群、あるいは単項イデアル整域上の「ねじれなし加群 (torsion-free module)」を一般化したものとして発

見されました。

② 幾何学的な意味の後付け（ファイバーの連続性）

その後、グロタンディークらによって、加群の平坦性はスキームの間の写像である「平坦射（flat morphism）」へと拡張されました。

幾何学的に、写像 $f: X \rightarrow Y$ が平坦であるということは、底空間 Y の点 y を動かしたときに、その真上にあるファイバー（断面） X_y が「次元が急激に飛び跳ねたり、病的な潰れ方をしたりせず、連続的かつ均一に変化する」という性質を意味することが分かりました。これによって、代数幾何学における**変形理論（deformation theory）**において不可欠な概念となりました。

代数幾何学者デヴィッド・マンフォード（David Mumford）は、その高名な教科書『The Red Book of Varieties and Schemes』の中で、この代数から始まって幾何学を救った奇妙な経緯を次のように評しています。

"The concept of flatness is a riddle that comes out of algebra, but which technically is the answer to many prayers."

（平坦性の概念は、代数学から現れた『謎（なぞなぞ）』であるが、技術的には多くの祈りに対する答えである）

3. 根拠となるソース

- **セールの初出論文 (GAGA)**

Jean-Pierre Serre, "Géométrie algébrique et géométrie analytique", Annales de l'institut Fourier, tome 6 (1956), pp. 1-42.

- [Numdamのオープンアクセスリンク](#)

21. Modules plats.

DÉFINITION 3. — Soit B un A -module. On dit que B est A -plat (ou plat) si, pour toute suite exacte de A -modules:

$$E \rightarrow F \rightarrow G,$$

la suite

$$E \otimes_A B \rightarrow F \otimes_A B \rightarrow G \otimes_A B$$

est exacte.

- [英訳のdviファイル](#)

21. Flat modules.

Definition 3. Let B be an A -module. One says that B is A -flat (or flat) if, for every exact sequence of A -modules

$$E \rightarrow F \rightarrow G,$$

the sequence

$$E \otimes_A B \rightarrow F \otimes_A B \rightarrow G \otimes_A B$$

is exact.

- マンフォードの評の一言

David Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes*, Lecture Notes in Mathematics 1358, Springer. (Chapter III, §10 "Flat and Smooth Morphisms").

§10. Flat and smooth morphisms

The concept of flatness is a riddle that comes out of algebra, but which technically is the answer to many prayers. Let's recall the basic algebra first:...

- [GoogleでThe Red Bookについて検索](#)

- 創始者の記憶（数学コミュニティの記録）

ブライアン・コンラッドらがセール本人に語源を尋ねた際のやり取りは、現代の数学者たちの情報交換プラットフォームである MathOverflow や Math Stack Exchange にて複数の専門家によって言及・記録されています。

- [Math Stack Exchange: What is the intuition behind the name "Flat modules"?](#)
- [MathOverflow: Why are flat morphisms "flat?"](#)

A couple of weeks ago I asked Serre about this. He didn't remember why the word flat was used, or if the word was due to him or possibly Cartan/Eilenberg. One point he emphasized is that it was Grothendieck who deserves all credit for the discovery of the importance of flatness in geometry (fibrational criteria, families, etc.). For Serre it was a matter of isolating the "right" algebraic notion with which to discuss the various changes of rings (analytic vs. algebraic local rings, completions thereof, general localization) which came up in GAGA and FAC. – BCnrd Commented May 23, 2010 at 6:11